

Matemáticas Financieras

Lección 2

Leyes Financieras

Manuel León Navarro

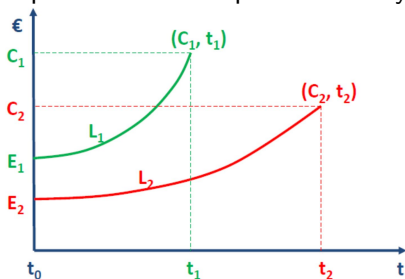
CES Cardenal Cisneros



Comparación capitales financieros

Dados dos capitales (C_1, t_1) y (C_2, t_2) , se elige un momento del tiempo p y se encuentra el valor equivalente en p , que llamamos E_i .

- Así, $(C_1, t_1) \sim (E_1, p = t_0)$ y $(C_2, t_2) \sim (E_2, p = t_0)$
- Preferencia por el capital con valor equivalente mayor:



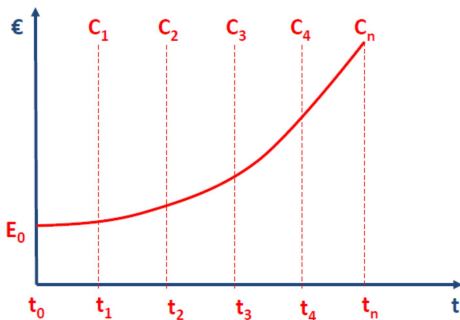
- Ahora E_1 y E_2 son comparables (magnitudes financieramente homogéneas) ya que están valorados en el mismo momento del tiempo $p = t_0$ (el momento de valoración no tiene por qué ser el instante inicial)

Leyes Financieras

- Una ley financiera es una expresión matemática que permite encontrar E_i :

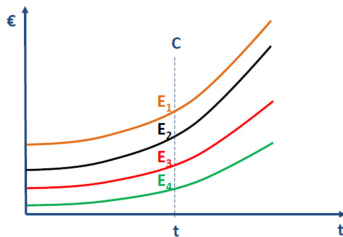
$$E = F(C, t, p)$$

- Para un capital financiero, la ley permite encontrar todos los capitales equivalentes o financieramente homogéneos:



Leyes Financieras - Observaciones

- De la misma forma, para cada ley financiera puede establecer los capitales equivalentes a un efectivo dado y por lo tanto determinar la relación de equivalencia:



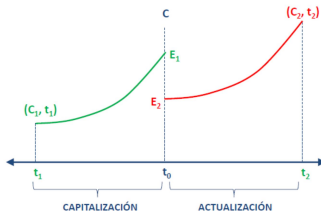
- Debido a las propiedades de las leyes financieras, la cuantía afecta linealmente a la ley financiera y por lo tanto:

$$F(C, t, p) = CF(t, p)$$

Siendo $F(t, p)$ la ley financiera unitaria (por unidad de cuantía):

Leyes Financieras - Observaciones (cont.)

- En función de la relación entre p y t las leyes financieras se pueden clasificar en dos tipos:
 - *Leyes de capitalización*. Si $p > t$ y se denota por $L(t, p)$
 - Capitalización Simple: Intercambio inferior a un año y tipo de interés simple.
 - Capitalización Compuesta: Intercambio superior a un año y tipo de interés compuesto.
 - *Leyes de descuento (o actualización)*. Si $p < t$ y se denota por $A(t, p)$
 - Actualización (o descuento) Simple vs Actualización (o descuento) Compuesta
- Representación gráfica



Leyes Financieras - Observaciones (cont.)

- Debido a que las leyes financieras con las que trabajamos son estacionarias, la ley devuelve el mismo valor cuando la distancia entre p y t sea la misma, independientemente de las fechas consideradas. Esto quiere decir que, por ejemplo, la ley devolvera la misma cantidad si $p = 2000$ y $t = 2004$ que si $p = 2002$ y $t = 2006$ ya que en ambos casos la distancia es 4 años.
- Por este motivo, en la mayoría de ocasiones la ley se especifica en términos del número de periodos entre el momento de valoración y el vecimiento, en vez de hacerlo en términos de las fechas concretas. Así, por ejemplo, si denotamos a $t^* = t - p$, la ley financiera unitaria deja de depender de dos variables $F(t, p)$, para depender de una $F(t^*)$



Leyes Financieras - Propiedades

- Las leyes financieras son expresiones matemáticas que deben cumplir una serie de propiedades para poder ser leyes. Sin entrar en detalle matemático, las propiedades básicas que deben cumplir son:
- Deben ser crecientes: El capital tiene un valor intrínseco fruto de su capacidad para generar valor añadido sin riesgo. La pendiente es positiva porque cuanto más tiempo pasa más intereses devenga el capital.
- Deben ser continuas: El capital tienen un valor cierto en cualquier momento del tiempo.
- Decisores racionales: Son conocidas y aceptadas por las partes asumiendo un determinado nivel de riesgo. No se contempla la realización de una inversión que perjudique los intereses de una de las partes conociéndolo a priori.
- Cumplen el principio de equivalencia financiera: El valor de la prestación coincide con el de la contraprestación en cualquier momento de la vida de la operación financiera.



Leyes Financieras - Ejemplo

Indicar el orden de preferencia de los capitales siguientes: (100.000;2013), (110.000;2015) y (120.000;2016) si la ley utilizada es $A(t, p) = 1 - 0,05(t - p)$ y se utiliza como momento de valoración $p = 2012$.

Para determinar el orden de preferencia hay que encontrar las cuantías equivalentes en $p = 2012$. Así para el primero

$$V_1 = 100,000 \cdot [1 - 0,05(2013 - 2012)] = 95,000$$

Para el segundo

$$V_2 = 110,000 \cdot [1 - 0,05(2015 - 2012)] = 93,500$$

y para el tercero

$$V_3 = 120,000 \cdot [1 - 0,05(2016 - 2012)] = 96,000$$



Leyes Financieras - Ejemplo

La relación de equivalencia queda:

$$(120,000; 2016) \succ (100,000; 2013) \succ (110,000; 2015)$$

El capital preferido es $(120,000; 2016)$ ya que tiene un valor equivalente en 2012 mayor a los otros dos capitales.

Observación

También se puede aplicar la ley en términos del número de periodos entre el momento de valoración. Así, por ejemplo, en el primer capital con $p = 2002$ y $t = 2003$, se tiene que $t^* = 2003 - 2002 = 1$ y por lo tanto el valor equivalente quedaría:

$$V_1 = 100,000 \cdot [1 - 0,05(1)] = 95,000$$



Leyes Financieras - Ejercicio

Dados dos capitales (100;2016) y (200,2018). ¿Se puede decir que hoy son equivalentes si se utiliza la ley financiera unitaria $F(t, p) = e^{p-t}$?



Leyes Financieras - Ejercicio - Resuelto

Para determinar el orden de preferencia hay que encontrar las cuantías equivalentes en $p = 2020$, que es año actual. Para el capital primero

$$V_1 = 100 \cdot [e^{2020-2016}] = 5459,81$$

Para el segundo

$$V_2 = 200 \cdot [e^{2020-2018}] = 1477,81$$

Como $5459,81 > 1477,81$ entonces $(100; 2016) \succ (200; 2018)$

Magnitudes Derivadas

A partir de C y t surgen otros conceptos derivados:

Factor: número por el que hay que multiplicar a la cuantía en t_1 para obtener la cuantía en t_2 o viceversa(función de t_1 , t_2 y p).

- Caso capitalización

- 1 Factor de capitalización: Obtiene C_2 multiplicando a C_1 por dicho factor
- 2 Factor de contracapitalización: Obtiene C_1 conocido C_2
- 3 Montante Es la cuantía del final de la operación ($M = C_2$)

- Caso descuento

- 1 Factor de descuento: Obtiene C_1 multiplicando a C_2 por dicho factor
- 2 Factor de contradesconto: Obtiene C_2 multiplicando a C_1 por dicho factor
- 3 Valor Descontado Es la cuantía del inicio de la operación (C_1)



Magnitudes Derivadas - Interés y tipo de interés

- Cuando se lleva a cabo una inversión se espera obtener un beneficio de ella. A la diferencia entre lo devuelto por la inversión (E) al pasar t periodos y la cuantía inicial C se le denomina interés: $E - C$
- Debido a que el interés depende de la cuantía inicial C , para comparar inversiones se utiliza el crecimiento proporcional a la cuantía inicial $\frac{E-C}{C}$
- Pero como el tiempo es una variable fundamental, habrá que tener en cuenta los periodos que han pasado hasta conseguir ese interés. El tipo de interés nos mide el incremento proporcional de la cuantía por unidad de tiempo.
- Por este motivo, todos los tipos de interés deben llevar el tiempo al que están referidos: por ejemplo 5 % anual, 7 % semestral, etc
- El tipo de interés se exige por:
 - la falta de disponibilidad de los fondos prestados durante un tiempo (Coste de oportunidad para el prestamista).
 - el riesgo que se asume al existir la posibilidad de no recuperar el dinero prestado.



Suma y desdoblamiento de Capitales

- Sumar capitales es sustituir dos capitales por un único capital que sea equivalente.
- Dados (C_1, t_1) y (C_2, t_2) y una ley financiera de valoración en p , el capital (C, t) es la suma de los capitales anteriores si se verifica que:

$$C_1 \cdot F(t_1, p) + C_2 \cdot F(t_2, p) = C \cdot F(t, p)$$

- Gráficamente:

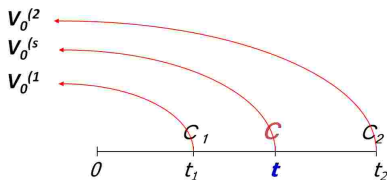


Figura: Comparación - Descuento

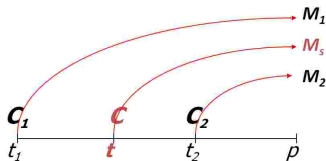


Figura: Comparación - Capitalización

Suma y desdoblamiento de Capitales

- Lógicamente, conocidos (C_1, t_1) y (C_2, t_2) de la relación de equivalencia se desprenden dos incógnitas: C y t . Y por lo tanto, para resolver el problema se debe fijar una de ellas y encontrar la otra.
- En el desdoblamiento de capitales se conocen los valores C y t y las incógnitas son alguna de las siguientes: C_1 , t_1 , C_2 ó t_2



Suma de Capitales - Ejemplo 1

Se han de pagar dos letras, la primera de diez mil euros dentro de 45 días ($\frac{45}{360}$ años) y la segunda de veinte mil euros dentro de 90 días ($\frac{90}{360}$ años) y se decide sustituirlas por una sola. Si la nueva letra se debe pagar en 70 días ($\frac{70}{360}$ años) y se utiliza la ley unitaria $F(C, t) = C(1 - 0,15 \cdot t)$, ¿Cual debe ser la cuantía de dicha letra si el momento de valoración es hoy?

- Para resolver el ejercicio se debe elegir el momento de valoración ambas letras. En este caso, tal y como se observa en el enunciado se utiliza el momento actual.
- El valor actual de la primera letra es:

$$V_0^1 = C_1 \cdot [1 - 0,15 \cdot (t_1)] = 10000 \cdot \left[1 - 0,15 \cdot \frac{45}{360} \right] = 10000 \cdot 0,98125 = 9812,5$$

CARDENAL



CISNEROS

Suma de Capitales - Ejemplo 1 (cont.)

- El valor actual de la segunda letra es:

$$V_0^2 = C_2 \cdot [1 - 0,15 \cdot (t_2)] = 20000 \cdot \left[1 - 0,15 \cdot \frac{90}{360}\right] = 20000 \cdot 0,9625 = 19250$$

- El valor actual de la letra equivalente a ambas (o letra suma) será:

$$V_0^S = C_S \cdot [1 - 0,15 \cdot (t_S)] = C_S \cdot \left[1 - 0,15 \cdot \frac{70}{360}\right] = C_S \cdot 0,97$$

- Ahora ya tenemos todos los capitales valorados en $p = 0$ y en dicho momento la suma de los capitales debe ser igual al capital suma y por lo tanto:

$$V_0^S = V_0^1 + V_0^2$$



Suma de Capitales - Ejemplo 1 (cont.)

- o también:

$$C_S \cdot 0,97 = 9812,5 + 19250 = 29062,5 \Rightarrow C_S = \frac{29062,5}{0,97} = 29961,34$$

- Y por lo tanto la letra será de 29961.34 euros a pagar en 70 días.

Suma de Capitales Ejercicio

Una empresa tiene el acuerdo de pagar una letra de 20 mil euros dentro de 2 años y otra letra de 10 mil euros a pagar dentro de 0.5 años. Dicha empresa estudia la posibilidad de pagar ambas letras dentro de un año. Si se utiliza la ley $F(C, t) = C(1 - 0,06)^t$ (t medido en años), ¿Cual debe ser la cuantía de dicha letra para que el cambio en los pagos sea equivalente?

Suma de Capitales Ejercicio - Resuelto

- Para resolver el ejercicio se debe elegir el momento de valoración ambas letras. En este caso, tal y como se observa en el enunciado se utiliza el momento actual.
- El valor actual de la primera letra es:

$$V_0^1 = C_1 \cdot (1 - 0,06)^{(t_1)} = 20 \cdot (1 - 0,06)^2 = 17,672$$

Suma de Capitales Ejercicio - Resuelto

- El valor actual de la segunda letra es:

$$V_0^2 = C_2 \cdot (1 - 0,06)^{(t_2)} = 10 \cdot (1 - 0,06)^{\frac{1}{2}} = 9,695$$

- El valor actual de la letra equivalente a ambas (o letra suma) será:

$$V_0^S = C_S \cdot (1 - 0,06)^{(t_S)} = C_S \cdot (1 - 0,06)^1 = C_S \cdot 0,94$$

- Ahora ya tenemos todos los capitales valorados en $p = 0$ y en dicho momento la suma de los capitales debe ser igual al capital suma y por lo tanto:

$$V_0^S = V_0^1 + V_0^2 \Rightarrow C_S \cdot 0,94 = 17,672 + 9,695 \Rightarrow C_S = \frac{17,672 + 9,695}{0,94} = 29,114$$



Suma de Capitales Ejercicio

Una empresa tiene el acuerdo de pagar una letra de 20 mil euros dentro de 2 años y otra letra de 10 mil euros a pagar dentro de 0.5 años. Dicha empresa estudia la posibilidad de pagar ambas letras dentro de un año. Si se utiliza la ley $F(C, t) = C(1 - 0,06t)$ (t medido en años), ¿Cual debe ser la cuantía de dicha letra para que el cambio en los pagos sea equivalente?

Suma de Capitales Ejercicio - Resuelto

- Para resolver el ejercicio se debe elegir el momento de valoración ambas letras. En este caso, tal y como se observa en el enunciado se utiliza el momento actual.
- El valor actual de la primera letra es:

$$V_0^1 = C_1 \cdot [1 - 0,06 \cdot (t_1)] = 20 \cdot [1 - 0,06 \cdot 2] = 17,6$$

Suma de Capitales Ejercicio - Resuelto

- El valor actual de la segunda letra es:

$$V_0^2 = C_2 \cdot [1 - 0,06 \cdot (t_2)] = 10 \cdot \left[1 - 0,06 \cdot \frac{1}{2}\right] = 9,7$$

- El valor actual de la letra equivalente a ambas (o letra suma) será:

$$V_0^S = C_S \cdot [1 - 0,06 \cdot (t_S)] = C_S \cdot [1 - 0,06 \cdot 1] = C_S \cdot 0,94$$

- Ahora ya tenemos todos los capitales valorados en $p = 0$ y en dicho momento la suma de los capitales debe ser igual al capital suma y por lo tanto:

$$V_0^S = V_0^1 + V_0^2 \Rightarrow C_S \cdot 0,94 = 17,6 + 9,7 \Rightarrow C_S = \frac{17,6 + 9,7}{0,94} = 29,042$$


Conceptos basicos de matematicas financieras - Ejercicios para casa

- ❶ Los capitales $(100, 2020)$ y $(125, 2024)$ son equivalentes con la ley financiera de descuento:

$$F(C, t, p) = \frac{C}{1 + i(t - p)}$$

Si se valora hoy ambos capitales, determinar razonadamente el valor numérico de i .

- ❷ Sea el capital $(250, 2020)$ y sea el capital $(300, t)$. Si se sabe que utilizando la ley de capitalización $F(C, t, p) = C(1, 05)^{p-t}$ ambos capitales son equivalentes, encontrar el vencimiento del segundo capital.
- ❸ Determinar el capital equivalente a $(1000000, 2020)$ en 2012 utilizado como punto de valoración $p = 2014$ si la ley financiera es:
- ❶ $L(C, t, p) = C[1 + 0,1 \cdot (p - t)]$
 - ❷ $L(C, t, p) = C[(1 + 0,08)^{p-t}]$



Conceptos basicos de matematicas financieras - Ejercicios para casa

- 4 Una familia tiene dos depósitos en el banco, uno de 20000 euros que empieza dentro de 9 meses y cuya duración es 3 meses ($\frac{3}{12}$ años) y otro de 15000 euros, que empieza dentro de 7 meses y cuya duración es 5 meses ($\frac{5}{12}$ años). Si se quieren cambiar ambos por otro depósito, que empieza dentro de 6 meses y cuya duración es 6 meses, encontrar la cuantía que resulta equivalente si se utiliza como momento de valoración un año a partir de este momento y la ley utilizada es $F(C, t) = C(1 + 0,05 \cdot t)$.